

1. Проблема трех тел и LISA

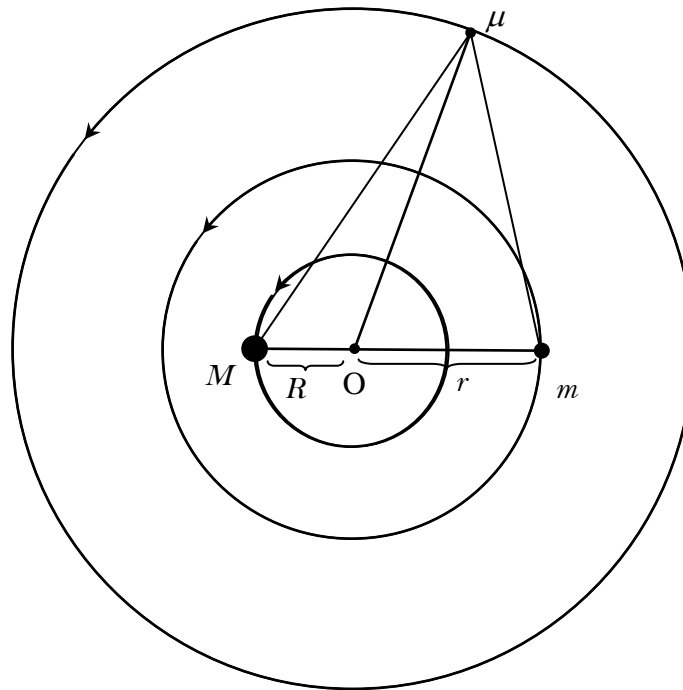


Рис. 1. Концентрические орбиты трех тел в одной плоскости.

1.1 Два тела с массами M и m движутся по круговым орбитам с радиусами R и r , соответственно, вокруг общего центра масс. Выразите угловую скорость вращения ω_0 отрезка, соединяющего тела M и m , через R, r, M, m и гравитационную постоянную G .

[1.5 балла]

1.2 Третье тело с пренебрежимо малой массой μ вращается в той же плоскости по круговой орбите вокруг того же центра масс так, что остается неподвижным относительно тел M и m (рис. 1.). Считайте, что третье тело **не** лежит на прямой, соединяющей тела M и m . Выразите следующие параметры через R и r :

[3.5 балла]

- 1.2.1 расстояние от тела m до M .
- 1.2.2 расстояние от тела m до μ .
- 1.2.3 расстояние от тела m до центра масс системы.

1.3 Рассмотрите случай $M = m$. Тело m выводят из положения равновесия в радиальном направлении (вдоль радиуса $O m$). Выразите циклическую частоту радиальных

колебаний тела через ω_0 . Считайте, что момент импульса тела m не изменяется. [3.2 балла]

Лазерная интерферометрическая космическая антенна LISA (The Laser Interferometry Space Antenna) представляет собой три одинаковых космических аппарата и предназначена для детектирования низкочастотных гравитационных волн. Каждый из аппаратов располагается в вершине равностороннего треугольника, как показано на рис.2. и рис. 3. Длина сторон треугольника (плеч интерферометра) – около 5,0 млн. км. Система LISA находится на земной орбите так, что угол Земля-Солнце-LISA составляет 20° . Каждый аппарат движется по слегка наклоненной орбите вокруг Солнца. Фактически, в системе отсчета, связанной с LISA, аппараты вращаются вокруг центра антенны с периодом в 1 год.

Аппараты непрерывно посылают и принимают лазерные сигналы друг другу. Таким образом они детектируют гравитационные волны, измеряя небольшие изменения длин плеч интерференционным методом. Столкновение массивных объектов, таких как черные дыры, в соседних галактиках является источником гравитационных волн.

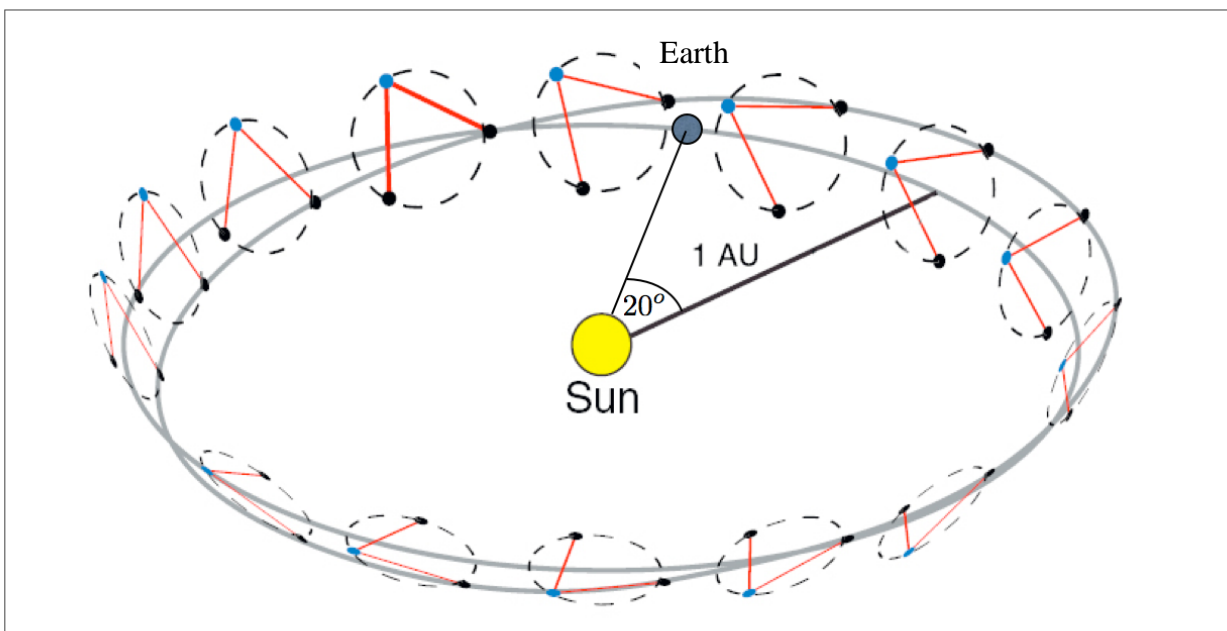


Рис. 2. Изображение орбиты LISA. Три аппарата вращаются с периодом в 1 год. Угол Земля-Солнце-LISA составляет 20° (Earth – Земля, Sun – Солнце). (Иллюстрация из D.A. Shaddock, “An Overview of the Laser Interferometer Space Antenna”, *Publications of the Astronomical Society of Australia*, 2009, **26**, pp.128-132.).

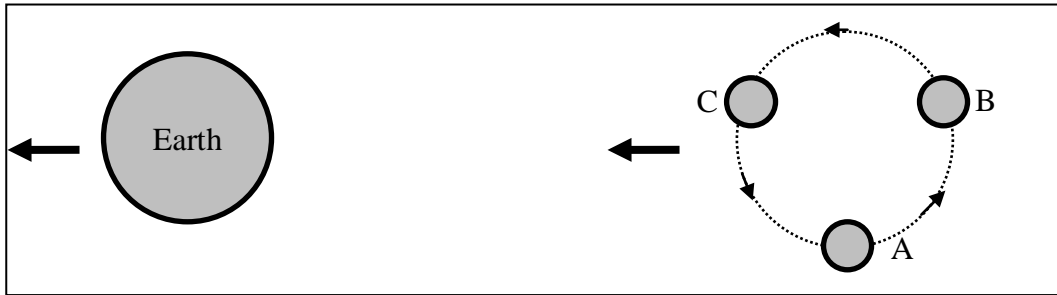


Рис. 3. Увеличенное изображение трех аппаратов LISA, двигающихся вслед за Землей. А, В и С – три аппарата, находящиеся в вершинах равностороннего треугольника (Earth – Земля).

- 1.4 Определите вектор относительной скорости движения одного из аппаратов относительно другого в плоскости LISA. [1.8 балла]

2. Заряженный мыльный пузырь

Сферический мыльный пузырь радиусом R_0 , наполненный воздухом с плотностью ρ_i при температуре T_i , находится в воздухе с плотностью ρ_a при температуре T_a и атмосферном давлении P_a . Мыльная пленка характеризуется поверхностным натяжением γ , плотностью ρ_s и толщиной t . Поверхностное натяжение и масса мыльной пленки не изменяются с температурой. Считается, что $R_0 \gg t$.

Увеличение энергии dE , требуемое для увеличения площади поверхности границы между мыльной пленкой и воздухом на величину dA , дается соотношением $dE/dA = \gamma$, где γ – поверхностное натяжение пленки.

- 2.1. Запишите отношение $\rho_i T_i / \rho_a T_a$ через γ , P_a и R_0 . [1,7 балл]
- 2.2. Найдите численное значение $(\rho_i T_i / \rho_a T_a) - 1$, используя значения $\gamma = 0,0250$ Н/м, $R_0 = 1,00$ см и $P_a = 1,013 \times 10^5$ Н/м². [0,4 балла]
- 2.3. Воздух внутри пузыря первоначально теплее атмосферного. Найдите значение минимальной температуры T_i , необходимой для того, чтобы пузырь мог парить в воздухе, не падая. Используйте значения $T_a = 300$ К, $\rho_s = 1000$ кг/м³, $\rho_a = 1,30$ кг/м³, $t = 100$ нм и $g = 9,80$ м/с². [2,0 балла]

Через некоторое время после образования мыльного пузыря установится тепловое равновесие между ним и окружающим воздухом. Поэтому в неподвижном воздухе мыльный пузырь опустится на землю.

- 2.4. Найдите минимальную скорость u поднимающегося вверх воздуха, при которой мыльный пузырь, находящийся в тепловом равновесии с воздухом, не опускается. Выразите ответ через ρ_s , R_0 , g , t и коэффициент вязкости воздуха η . Сила сопротивления определяется законом Стокса: $F = 6\pi\eta R_0 u$. [1,6 балла]
- 2.5. Рассчитайте численно величину u , используя значение $\eta = 1,8 \times 10^{-5}$ кг/(м·с). [0,4 балла]

Проведенные расчеты показывают, что слагаемые, включающие поверхностное натяжение γ , не оказывают существенного влияния на результат. Поэтому во всех последующих пунктах поверхностным натяжением можно пренебречь.

- 2.6. Предположим теперь, что пузырь заряжен равномерно с общим зарядом q . Выведите уравнение для определения радиуса R_1 пузыря после его зарядки через R_0 , P_a , q и электрическую постоянную ϵ_0 . [2,0 балла]
- 2.7. Предположим, что заряд пузыря q не очень велик ($q^2 / (\epsilon_0 R_0^4) \ll P_a$), так что зарядка пузыря увеличивает его радиус на малую величину ΔR ($\Delta R = R_1 - R_0$). Найдите ΔR .

Известно, что $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ при $x \ll 1$. [0,7 балла]

- 2.8. Найдите такой заряд q , выраженный через t , ρ_a , ρ_s , ϵ_0 , R_0 , P_a , при котором пузырь будет неподвижно висеть в воздухе. Вычислите величину этого заряда. Электрическая постоянная $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ Ф/м. [1,2 балл]

3. В честь столетия модели атомного ядра Резерфорда.

Рассеяние иона на нейтральном атоме.

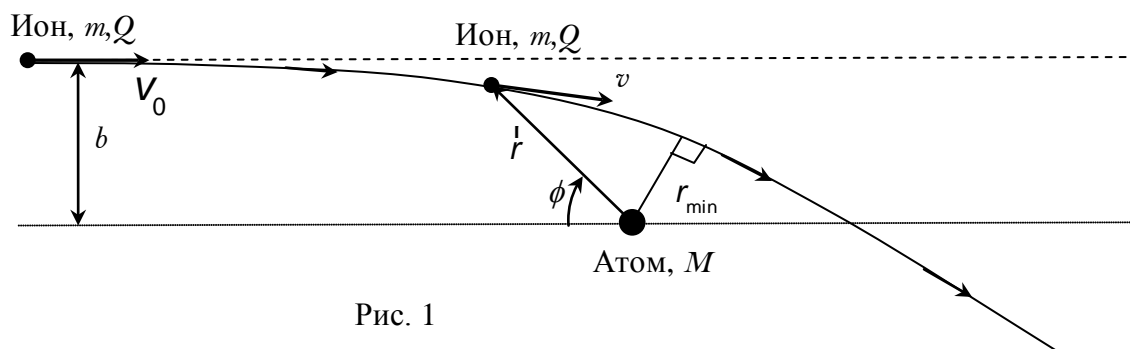
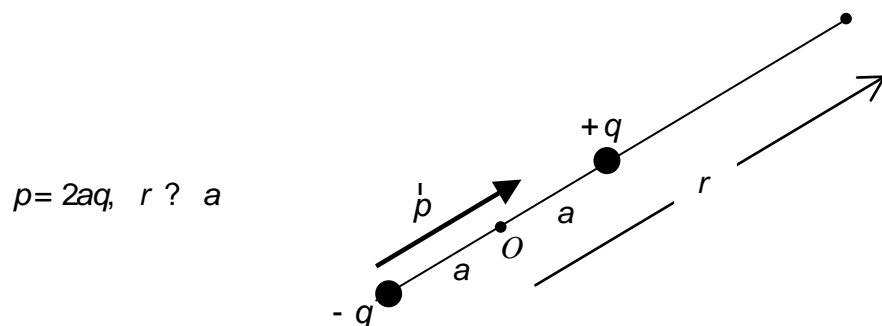


Рис. 1

Ион массой m , зарядом Q , движется с начальной скоростью v_0 из бесконечности к окрестности нейтрального атома массой $M \gg m$ и электрической поляризуемостью a . Прицельный параметр равен b , как показано на рис. 1.

Атом мгновенно поляризуется электрическим полем (\vec{E}) приближающегося иона. В результате у него появляется электрический дипольный момент $\vec{p} = a\vec{E}$. Релятивистские эффекты не учитывайте.

3.1 Рассчитайте напряжённость \vec{E}_p электрического поля на расстоянии r на оси диполя с дипольным моментом \vec{p} , расположенного в начале координат (точка O). [1.2 балла]



$$p = 2aq, \quad r \gg a$$

Рис. 2

3.2 Найдите выражение для силы \vec{f} , действующей на ион со стороны поляризованного им атома. Покажите, что эта сила есть сила притяжения независимо от знака заряда иона.

[3.0 балла]

3.3 Найдите электрическую потенциальную энергию взаимодействия атома и иона, выразив её через a, Q и r .

[0.9 балла]

3.4 Получите выражение для минимального расстояния r_{\min} между ионом и атомом (см. рис. 1).

[2.4 балла]

3.5 Если прицельный параметр b меньше критического значения b_0 , то ион упадёт по спиральной траектории на атом. В этом случае ион окажется нейтрализованным, а атом — заряженным. Этот процесс известен как «перезарядка». Чему равна площадь сечения $A = \rho b_0^2$ этой «перезарядки» атома, как это видно «с точки зрения» налетающего иона?

[2.5 балла]