

## ВОДЯНАЯ СТУПА ДЛЯ ШЛИФОВКИ РИСА

### А. Введение

Рис является главным национальным продуктом для подавляющего большинства людей во Вьетнаме. Чтобы получить белый рис от него необходимо отделить сначала его кожуру ("обдирка"), а затем отруби ("шлифовка"). Горные регионы северного Вьетнама богаты водными струями, и люди, живущие в этих регионах, используют *водные устройства (ступки)* для шлифовки риса. Рисунок 1 показывает одно из таких устройств, а рисунок 2 – принцип его работы.

### А. Конструкция и принцип работы.

#### 2.1. Конструкция

Водная ступа, показанная на рис. 1, состоит из:

*Ступы*, на самом деле просто деревянная емкость для риса.

*Рычаг*, который представляет собой деревянный ствол с концами разной длины. Он может вращаться вокруг некоторой горизонтальной оси. *Дубинка (пестик)* прикреплена перпендикулярно к рычагу с его короткой стороны. Длина дубинки такова, что она может прикоснуться к рису в ступе, когда рычаг лежит горизонтально. На длинном конце рычага вырезано углубление для образования сосуда для воды. Форма этого сосуда очень важна для действия устройства.

#### 2. Режимы работы.

Ступа может работать в двух режимах.

*Рабочий режим.* В этом режиме, ступа совершает некоторый рабочий цикл, проиллюстрированный на рис. 2.

Шлифовка риса происходит благодаря энергии, передаваемой от дубинки к рису в стадии (f) на рис. 2. Если, по какой-то причине, дубинка не может прикоснуться к дну ступки, говорят, что устройство не работает.

*Мертвый режим с поднятым рычагом.* В стадии (с) рабочего цикла (рис. 2) когда угол наклона рычага  $\alpha$  увеличивается, количество воды в сосуде уменьшается. В определенный момент времени, количество воды становится достаточным для уравнивания рычага. Обозначим значение угла наклона в этот момент через  $\beta$ . Если рычаг расположен под углом  $\beta$  и его начальная угловая скорость равна нулю, он останется навсегда в этом положении. Это и есть мертвый режим с поднятым рычагом. Устойчивость этого положения рычага зависит от скорости  $\Phi$  натекания воды в сосуд. Если  $\Phi$  превышает некоторое значение  $\Phi_2$ , только мертвый режим стабилен, и ступа переходит в него из любого

начального положения, то есть не может перейти в рабочий режим. Другими словами,  $\Phi_2$  является минимальной скоростью течения, при превышении которой устройство перестает работать.



**Рис. 1**

Водная рисошлифовальная ступка

Рабочий цикл ступы.

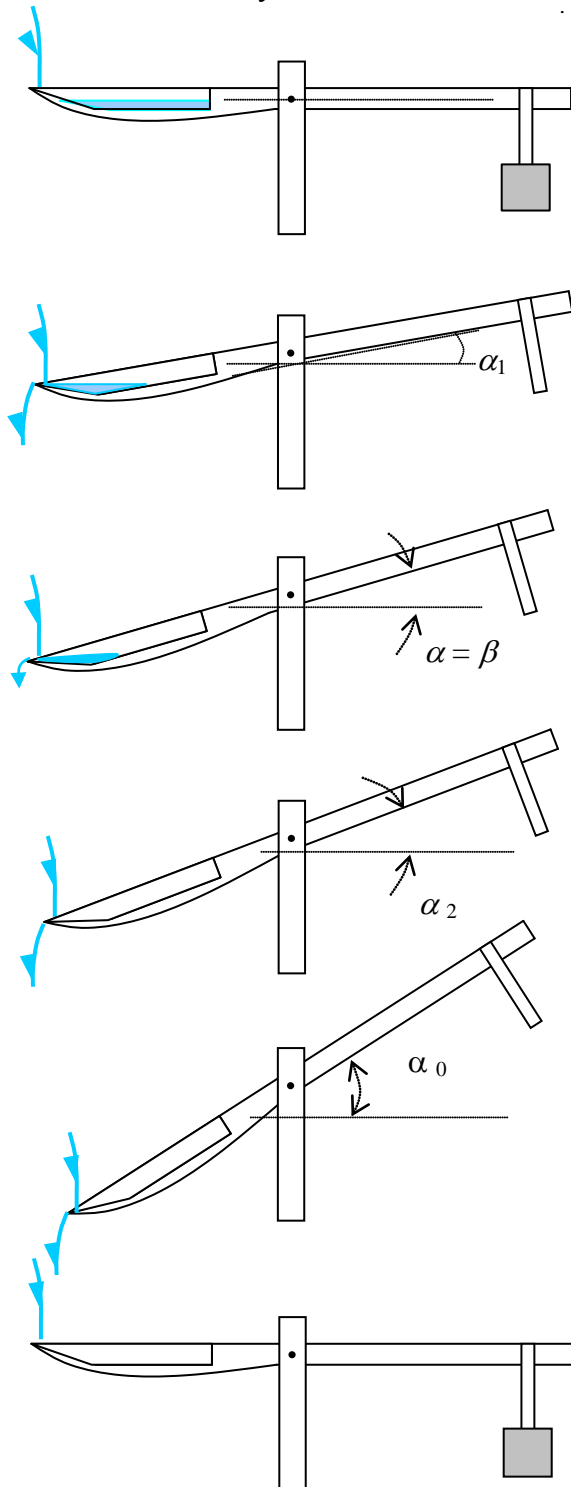


Рис. 2

a) В начальный момент сосуд пуст, дубинка покоится в ступке. Вода течет в сосуд с маленькой скоростью, но рычаг остается в горизонтальном положении некоторое время.

b) В некоторый момент количество воды в сосуде достаточно для поднятия рычага. Вода перекает к более отдаленной стороне сосуда, наклоня рычаг еще быстрее. Вода начинает вытекать при  $\alpha = \alpha_1$ .

c) Угол  $\alpha$  продолжает увеличиваться, вода продолжает вытекать. При некотором значении угла наклона,  $\alpha = \beta$ , суммарный вращающий момент становится равным нулю.

d) Угол  $\alpha$  продолжает расти, вода продолжает вытекать до тех пор, пока сосуд не опорожнится.

e) Угол  $\alpha$  продолжает расти по инерции. Благодаря форме сосуда, вытекающая вода сразу вытекает из него. Движение рычага по инерции продолжается до тех пор, пока угол  $\alpha$  не достигает максимального значения  $\alpha_0$ .

f) Когда сосуд пуст, вес рычага возвращает его назад в начальное горизонтальное положение. Дубинка делает тяжелый удар по ступке (с рисом внутри него) и



39th International Physics Olympiad - Hanoi - Vietnam - 2008

Theoretical Problem No. 1

начинается новый цикл.

### С. Задача

Рассмотрим водную рисошлифовую ступку (рис. 3).

Масса рычага (с дубинкой, но без воды) равна  $M = 30$  кг,

Центр масс рычага находится в точке  $G$ . Рычаг вращается вокруг оси  $T$  (точка  $T$  на рисунке).

Момент инерции рычага вокруг  $T$  равен  $I = 12$  кг·м<sup>2</sup>.

Когда есть вода в сосуде, масса воды обозначается  $m$ , центр масс воды – точкой  $N$ .

Угол наклона рычага к горизонту обозначается  $\alpha$ .

Основные размеры устройства и сосуда и сосуда приведены на рис. 3.

Пренебрегайте трением в оси вращения и силой, возникающей из-за натекания воды в сосуд. Считайте, что поверхность воды всегда горизонтальна.

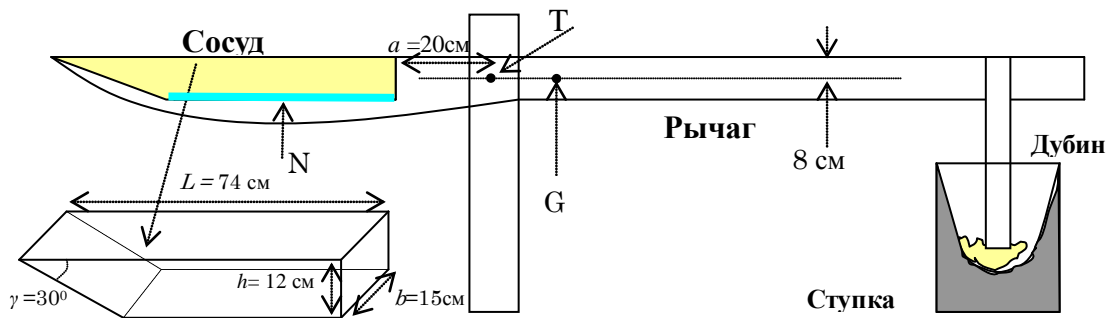


Рис. 3. Конструкция и размеры устройства

#### 1. Параметры устройства.

В начальный момент сосуд пуст и рычаг расположен горизонтально. Затем вода втекает в сосуд до тех пор, пока рычаг не начинает поворачиваться. Масса воды в сосуде в этот момент равна  $m = 1.0$  кг.

1.1. Определите расстояние от центра масс  $G$  рычага до оси вращения  $T$ . Известно, что линия  $GT$  горизонтальна, когда сосуд пуст.

1.2. Вода начинает вытекать из сосуда, когда угол между рычагом и горизонтальной осью достигает некоторого значения  $\alpha_1$ . Вода полностью выливается из сосуда, когда значение этого угла становится равным  $\alpha_2$ .

Вычислите значения углов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ .

1.3. Пусть  $\mu(\alpha)$  – суммарный вращающийся момент (относительно оси  $T$ ),

создаваемый весом рычага и воды в сосуде. При некотором угле  $\alpha = \beta$  этот момент становится равным нулю  $\mu(\alpha) = 0$ . Рассчитайте значения угла  $\beta$  и массы  $m_1$  воды в сосуде в этот момент.

## 2. Параметры рабочего режима.

Пусть вода втекает в сосуд с малой постоянной скоростью. **Количество воды, втекающей в сосуд, за время движения рычага, пренебрежимо мало.** В этой части задачи пренебрегайте изменением момента инерции системы в рабочем цикле.

2.1. Нарисуйте схематический график зависимости вращающего момента  $\mu$  от угла  $\alpha$ ,  $\mu(\alpha)$ , в течение рабочего цикла. Приведите явные значения  $\mu(\alpha)$  при углах  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ , и  $\alpha = 0$ .

2.2. Используя график, нарисованный в 2.1., дайте геометрическую интерпретацию значений общей работы  $W_{\text{total}}$ , произведенной моментом сил тяжести  $\mu(\alpha)$ ; и работы  $W_{\text{pounding}}$ , совершенной дубинкой над рисом, за один цикл.

2.3. С помощью графика, изображающего зависимость  $\mu(\alpha)$ , оцените максимальный угол отклонения  $\alpha_0$  и  $W_{\text{pounding}}$  (предполагая, что кинетическая энергия воды, текущей в сосуд и из него пренебрежимо мала.) Можете заменить кривые ломанными линиями, для облегчения расчетов.

## 3. Мертвый режим.

Пусть вода втекает в сосуд с постоянной скоростью натекания (массы в единицу времени)  $\Phi$ . В данной части необходимо учитывать количество воды, втекающей в сосуд при движении рычага.

3.1. Будем считать, что сосуд **всегда наполнен водой** (которая переливается через его край)

3.1.1. Нарисуйте примерный график зависимости вращающего момента  $\mu$  от угла  $\alpha$  в окрестности  $\alpha = \beta$ . К какому виду равновесия принадлежит

положение рычага при  $\alpha = \beta$  ?

3.1.2. Найдите аналитическую формулу для вращающего момента  $\mu(\alpha)$  как функции  $\Delta\alpha$ , когда  $\alpha = \beta + \Delta\alpha$ , причем  $\Delta\alpha$  мало.

3.1.3. Запишите дифференциальное уравнение движения рычага, который движется с нулевой начальной скоростью от начального положения  $\alpha = \beta + \Delta\alpha$  ( $\Delta\alpha$  мало). Покажите, что это движение с хорошей точностью является гармоническими колебаниями. Рассчитайте их период  $\tau$ .

3.2. При заданной скорости натекания  $\Phi$ , сосуд наполнен водой все время, только в том случае, когда рычаг движется достаточно медленно. Амплитуда гармонических колебаний зависит от  $\Phi$ . Определите значение  $\Phi_1$  скорости натекания  $\Phi$  (в кг/с) такое, чтобы рычаг мог совершать гармонические колебания с амплитудой  $1^\circ$ .

3.3. Если скорость  $\Phi$  велика настолько, что при колебательном движении рычага, когда угол наклона изменяется от  $\alpha_2$  до  $\alpha_1$ , то сосуд всегда остается наполненным водой. В этом случае устройство не может действовать в рабочем режиме. Допуская, что движение рычага является гармоническими колебаниями, оцените минимальную скорость течения  $\Phi_2$ , при которой устройство перестает функционировать в рабочем режиме.

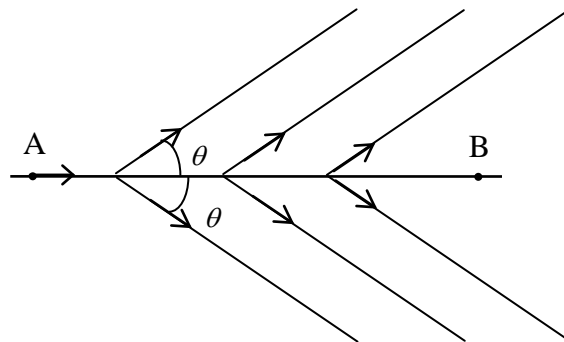


## ЧЕРЕНКОВСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ И КОЛЬЦЕВОЙ ЧЕРЕНКОВСКИЙ ДЕТЕКТОР

Свет распространяется в вакууме со скоростью  $c$ . Не существует частиц, движущихся со скоростью больше, чем  $c$ . Однако в прозрачной среде частица может двигаться со скоростью  $v$ , превышающей скорость света в этой среде  $c/n$ , где  $n$  – показатель преломления среды. Эксперимент (Черенков, 1934) и теория (Тамм и Франк, 1937) показали, что заряженная частица, движущаяся со скоростью  $v$  в прозрачной среде с показателем преломления  $n$ , удовлетворяющим условию  $v > c/n$ , излучает свет, названный *черенковским излучением*, в направлениях, образующих с ее траекторией угол

$$\theta = \arccos \frac{1}{\beta n}, \quad (1)$$

где  $\beta = v/c$ .



1. Чтобы объяснить этот эффект, рассмотрим частицу, движущуюся с постоянной скоростью  $v > c/n$  по прямой линии. Она проходит точку A в момент времени 0 и точку B в момент  $t_1$ . Так как задача симметрична относительно вращения вокруг оси AB, достаточно рассмотреть световые лучи в любой плоскости, содержащей AB.

В любой точке C между A и B частица излучает сферическую световую волну, распространяющуюся со скоростью  $c/n$ . Назовем волновым фронтом в заданный момент времени  $t$  огибающую всех таких сфер в этот момент.

1.1. Определите волновой фронт в момент времени  $t_1$  и начертите линию его сечения плоскостью, содержащей траекторию частицы.

1.2. Выразите угол  $\varphi$  между указанной линией и траекторией частицы через  $n$  и  $\beta$ .

2. Рассмотрим пучок частиц, движущихся вдоль прямой линии IS, пересекающей в точке S **выпуклое** сферическое зеркало с фокусным расстоянием  $f$  и центром C. Скорость пучка  $v > c/n$  такова, что угол  $\theta$  мал. Отрезок SC образует с линией SI малый угол  $\alpha$  (смотри рисунок в Листе ответов). Излучение пучка частиц создает кольцевое изображение в фокальной плоскости зеркала. Поясните это явление с помощью рисунка. Определите положение центра кольца O и его радиус  $r$ .

Установка, описанная выше, используется в *кольцевых черенковских детекторах* (КЧД), а среда, через которую частицы проходят, называется



излучателем.

**Примечание:** поскольку углы  $\alpha$  и  $\theta$  малы, во всех пунктах данной задачи соответствующими членами второго и высших порядков малости можно пренебречь.

3. Рассмотрим пучок частиц с известным импульсом  $p=10.0$  ГэВ/ $c$ , состоящий из частиц трех типов: протонов, каонов и пионов с массами покоя  $M_p=0.94$  ГэВ/ $c^2$ ,  $M_k=0.50$  ГэВ/ $c^2$  и  $M_\pi=0.14$  ГэВ/ $c^2$  соответственно. Напомним, что величины  $pc$  и  $Mc^2$  имеют размерность энергии, 1 эВ – энергия, приобретаемая электроном, ускоренным разностью потенциалов 1 В, 1 ГэВ =  $10^9$  эВ, 1 МэВ =  $10^6$  эВ.

Пучок частиц движется в воздухе, находящемся под давлением  $P$ , который играет роль излучателя. Показатель преломления воздуха выражается через его давление  $P$ , измеренное в атмосферах, с помощью формулы  $n=1+aP$ , где  $a=2.7 \cdot 10^{-4}$  атм $^{-1}$ .

3.1. Рассчитайте для каждого из трех типов частиц минимальное значение  $P_{min}$  атмосферного давления, при котором они начинают давать черенковское излучение.

3.2. Рассчитайте давление  $P_{1/2}$ , при котором радиус кольцевого изображения, порожденного излучением каонов, равен половине радиуса кольцевого изображения, порожденного излучением пионов, а также значения  $\theta_k$  и  $\theta_\pi$  для этого случая. Можно ли при таком давлении наблюдать кольцевое изображение, порожденное излучением протонов?

4. Предположим теперь, что пучок не является полностью монохроматическим: импульс частиц распределен в интервале с центром в точке 10 ГэВ/ $c$ , имеющем полуширину  $\Delta p$  (на половине высоты). Это приводит к уширению кольцевого изображения. Соответствующее уширение распределения по  $\theta$  характеризуется полушириной  $\Delta\theta$  (на половине высоты).

4.1. Вычислить  $\Delta\theta_k/\Delta p$  и  $\Delta\theta_\pi/\Delta p$ , то есть значение  $\Delta\theta/\Delta p$  для пионов и каонов.

4.2. Два кольцевых изображения, созданных излучением пионов и каонов, можно хорошо различить, если угловое расстояние  $\theta_\pi - \theta_k$  превышает сумму полуширин  $\Delta\theta = \Delta\theta_k + \Delta\theta_\pi$  более чем в 10 раз, то есть  $\theta_\pi - \theta_k > 10 \Delta\theta$ . Рассчитайте максимальное значение  $\Delta p$ , при котором два изображения еще можно хорошо различить.

5. Черенков впервые открыл эффект, ныне носящий его имя, наблюдая за сосудом с водой, расположенным вблизи радиоактивного источника. Он увидел, что вода в сосуде светилась.

5.1. Найдите минимальное значение кинетической энергии  $T_{min}$  частицы с массой покоя  $M$ , движущейся в воде, при котором появляется черенковское излучение. Показатель преломления воды  $n=1.33$ .

5.2. Радиоактивный источник, использованный Черенковым, излучал  $\alpha$ -частицы (ядра гелия), имеющие массу покоя  $M_\alpha=3.8 \text{ ГэВ}/c^2$ , и  $\beta$ -частицы (электроны), имеющие массу покоя  $M_e=0.51 \text{ МэВ}/c^2$ . Рассчитайте численные значения  $T_{min}$  для  $\alpha$ - и  $\beta$ -частиц.

Зная, что кинетическая энергия частиц, излучаемых радиоактивными источниками, не превышает нескольких МэВ, определите, какие частицы порождали излучение, наблюдавшееся Черенковым.

**6.** В предыдущих пунктах задачи не учитывалась зависимость черенковского излучения от длины волны  $\lambda$ . Учтем теперь тот факт, что черенковское излучение частицы имеет широкий непрерывный спектр, включающий видимую область (длины волн от 0.4 мкм до 0.8 мкм). Известно также, что при возрастании  $\lambda$  в пределах этой области показатель преломления излучателя линейно уменьшается на 2% от величины  $(n-1)$ .

6.1. Рассмотрим пучок пионов с заданным импульсом  $10.0 \text{ ГэВ}/c$ , движущийся в воздухе, находящемся под давлением 6 атм. Определите разность углов  $\delta\theta$ , соответствующих краям видимой области.

6.2. Качественно исследуйте влияние дисперсии (т.е. зависимости  $n$  от  $\lambda$ ) на изображение кольца, созданное излучением пучка пионов. Импульсы пионов распределены в интервале с центром в точке  $p=10 \text{ ГэВ}/c$ , имеющем полуширину  $\Delta p=0.3 \text{ ГэВ}/c$  (на половине высоты).

6.2.1. Рассчитайте уширение, обусловленное дисперсией (изменением показателя преломления), а также уширение, вызываемое немонохроматичностью пучка (разбросом импульсов частиц).

6.2.2. Опишите, как изменяется цвет кольца при переходе от его внутреннего края к внешнему, отметив соответствующие клеточки в Листе ответов.

## ИЗМЕНЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ВОЗДУХА С ВЫСОТОЙ, АТМОСФЕРНАЯ СТАБИЛЬНОСТЬ И ЗАГРЯЗНЕНИЕ

Вертикальное движение воздуха определяет многие атмосферные процессы, например, образование облаков и осадков, а также рассеяние воздушных загрязнений. Если атмосфера *стабильна*, вертикальное движение ограничено и воздушные загрязнения имеют тенденцию не рассеиваться, а собираться над областью, в которой находятся источники загрязнения. В то же время, в *нестабильной* атмосфере, вертикальное движение воздуха способствует вертикальному распространению загрязнений. Таким образом, концентрация загрязнений зависит не только от активности их источников, но и от стабильности атмосферы.

Будем определять атмосферную стабильность с помощью модели *воздушного пакета* (parcel), принимаемой в метеорологии, и сравнивать температуру такого пакета, поднимающегося или опускающегося адиабатически в атмосфере, с температурой окружающего воздуха. Мы увидим, что во многих случаях воздушный пакет, содержащий воздушные загрязнения и поднимающийся от земли, останавливается на некоторой высоте, называемой *высотой смешивания*. Чем больше высота смешивания, тем меньше концентрация воздушных загрязнений. В данной задаче предлагается оценить высоту смешивания и концентрацию угарного газа (CO), выбрасываемого мотоциклами в многолюдной части Ханоя, для примера, в утренний час пик, когда на уровнях выше 119 м вертикальное перемешивание ограничено из-за температурной инверсии (температура воздуха увеличивается с высотой).

Будем рассматривать воздух как идеальный двухатомный газ с молярной массой  $\mu = 29$  г/моль.

Квазистатический адиабатический процесс подчиняется уравнению  $pV^\gamma = \text{const}$ , где  $\gamma = c_p/c_V$  – отношение теплоёмкостей газа в изобарическом и изохорическом процессах.

**Вы можете использовать следующие данные при необходимости:**

Универсальная газовая постоянная  $R = 8.31$  Дж/моль·К,

Атмосферное давление у земной поверхности равно  $p_0 = 101,3$  кПа,

Ускорение свободного падения равно  $g = 9,81$  м/с<sup>2</sup>

Молярная теплоёмкость воздуха при постоянном давлении:  $c_p = \frac{7}{2}R$ .

Молярная теплоёмкость воздуха при постоянном объёме:  $c_V = \frac{5}{2}R$ .

**Математические подсказки**

a.

$$\int \frac{dx}{A+Bx} = \frac{1}{B} \int \frac{d(A+Bx)}{A+Bx} = \frac{1}{B} \ln(A+Bx)$$

b. Решение дифференциального уравнения  $\frac{dx}{dt} + Ax=B$  ( $A$  и  $B$  – константы) равно

$$x(t) = x_1(t) + \frac{B}{A},$$

где  $x_1(t)$  – решение однородного дифференциального уравнения  $\frac{dx}{dt} + Ax=0$ .

c. 
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

**1. Изменение давления с высотой**1.1. Предположим, что температура атмосферы постоянна по высоте и равна  $T_0$ . Напишите формулу, выражающую атмосферное давление  $p$  как функцию высоты  $z$ .

1.2. Допустим теперь, что температура атмосферы меняется с высотой по закону

$$T(z) = T(0) - \Lambda z,$$

где  $\Lambda$  – константа, называемая *скоростью изменения температуры* атмосферы с высотой (вертикальный градиент температуры равен  $-\Lambda$ ).1.2.1. Выразите атмосферное давление  $p$  в виде функции высоты  $z$ .1.2.2. Конвекция называется *свободной*, если она происходит вследствие того, что плотность верхних слоёв больше, чем нижних. При каких значениях  $\Lambda$  возникает свободная конвекция?**2. Изменение температуры воздушного пакета при вертикальном движении**

Рассмотрим воздушный пакет, движущийся вверх и вниз в атмосфере. Воздушный пакет представляет собой некоторый объём воздуха достаточного размера (шириной порядка нескольких метров), так, что его можно рассматривать как самостоятельный термодинамический объект, но всё же достаточно малый, чтобы температуру всех его точек можно было считать одинаковой. Вертикальное движение воздушного пакета можно рассматривать как квазистатический адиабатический процесс, т.е. теплообменом с окружающим воздухом можно пренебречь. Если воздушный пакет поднимается в атмосфере, он расширяется и охлаждается. Напротив, если он опускается, растущее внешнее давление сжимает воздух внутри пакета, в результате его температура увеличивается.

Так как размер пакета невелик, давление воздуха в разных его точках имеет одно и то же значение  $p(z)$ , где  $z$  – высота центра пакета. Температура также предполагается постоянной по всему пакету и равной  $T_{\text{parcel}}(z)$ ; эта температура в общем случае отличается от температуры окружающего воздуха  $T(z)$ . В частях 2.1 и 2.2 мы не будем делать никаких предположений относительно вида зависимости  $T(z)$ .

2.1. Изменение температуры пакета  $T_{\text{parcel}}$  с высотой характеризуется величиной  $\frac{dT_{\text{parcel}}}{dz} = -G$ . Выведите выражение для  $G(T, T_{\text{parcel}})$ .

2.2. Рассмотрим особое состояние атмосферы, при котором на любой высоте  $z$  температура  $T$  атмосферы равна температуре пакета  $T_{\text{parcel}}$ ,  $T(z) = T_{\text{parcel}}(z)$ .

Обозначим через  $\Gamma$  значение  $G$  при  $T = T_{\text{parcel}}$ , т.е.  $\Gamma = -\frac{dT_{\text{parcel}}}{dz}$  при  $T = T_{\text{parcel}}$ .

Величина  $\Gamma$  называется *скоростью изменения температуры в сухой адиабатической атмосфере*.

2.2.1. Выведите выражение для  $\Gamma$ .

2.2.2. Вычислите численное значение  $\Gamma$ .

2.2.3. Выведите выражение для температуры атмосферы  $T(z)$  как функции высоты.

2.3. Предположим, что температура атмосферы изменяется с высотой по закону

$T(z) = T(0) - \Lambda z$ , где  $\Lambda$  – константа. Получите зависимость температуры пакета от высоты  $z$ , т.е.  $T_{\text{parcel}}(z)$ .

2.4. Напишите приближённое выражение для  $T_{\text{parcel}}(z)$ , если  $|\Lambda z| \ll T(0)$  и  $T(0) \approx T_{\text{parcel}}(0)$ .

### 3. Стабильность атмосферы

В этой части мы будем предполагать, что  $T$  изменяется с высотой по линейному закону.

3.1. Рассмотрим воздушный пакет, находящийся в начальный момент времени в равновесии с окружающим воздухом на высоте  $z_0$ , т.е. имеющий ту же температуру  $T(z_0)$ , что и окружающий воздух. Если пакет незначительно смещается вверх или вниз (например, при атмосферном возмущении), возможен один из следующих трёх случаев:

– Воздушный пакет возвращается на первоначальную высоту  $z_0$ , равновесие пакета устойчиво. В этом случае говорят, что атмосфера стабильна.

– Воздушный пакет продолжает двигаться в направлении первоначального смещения. Равновесие пакета неустойчиво. Атмосфера нестабильна.

– Воздушный пакет остаётся в его новом положении, равновесие пакета безразлично. Атмосфера нейтральна.

Каким условиям должно удовлетворять значение  $\Lambda$ , чтобы атмосфера была: стабильной, нестабильной, нейтральной?

3.2. Пусть температура пакета на земле  $T_{\text{parcel}}(0)$  выше, чем температура  $T(0)$  окружающего воздуха. Выталкивающая сила поднимает его. Выведите выражение для максимальной высоты, которой пакет может достигать в случае стабильной атмосферы, в зависимости от  $\Lambda$  и  $\Gamma$ .

#### 4. Высота смешивания

4.1. Таблица 1 показывает температуру воздуха, записанную шаром-зондом в 7 часов утра в ноябрьский день в Ханое. Зависимость температуры от высоты внутри диапазонов:  $0 < z < 96$  м,  $96 \text{ м} < z < 119$  м,  $119 \text{ м} < z < 215$  м может быть приближённо описана формулой  $T(z) = T(0) - \Lambda z$ , где каждому диапазону соответствует своё значение  $\Lambda$ .

Рассмотрим воздушный пакет с температурой  $T_{\text{parcel}}(0) = 22$  °С, поднимающийся от земли. На основании данных, приведённых в Таблице 1, вычислите температуры пакета на высотах 96 м и 119 м, используя описанное выше линейное приближение.

4.2. Какой максимальной высоты  $H$  может достичь пакет? Найдите температуру  $T_{\text{parcel}}(H)$  пакета на этой высоте.

Высота  $H$  называется высотой смешивания. Воздушные загрязнения, выбрасываемые в атмосферу с земли, могут смешиваться с атмосферным воздухом (например, из-за ветра, турбулентности и т.д.) и остаются во взвешенном состоянии ниже высоты  $H$ .

**Таблица 1**

Данные, записанные шаром-зондом в 7:00 утра в ноябрьский день в Ханое.

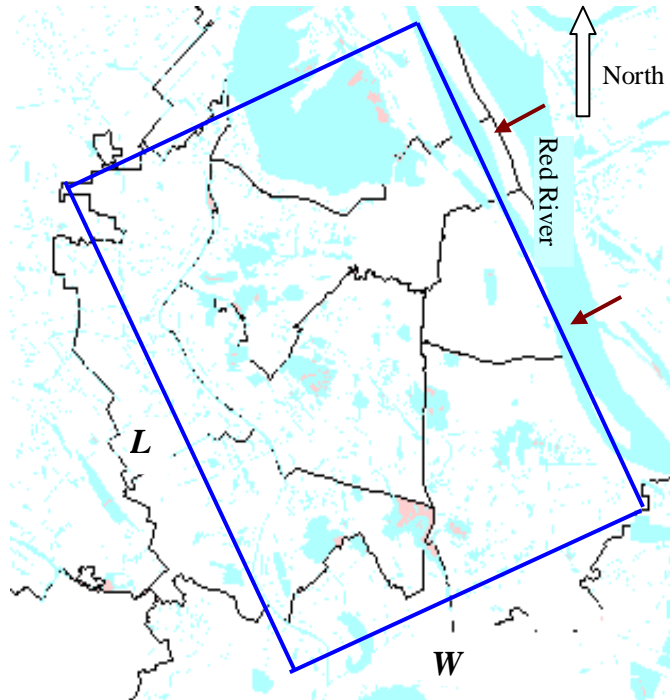
Высота, м	Температура, °C
5	21.5
60	20.6
64	20.5
69	20.5
75	20.4
81	20.3
90	20.2
96	20.1
102	20.1
109	20.1
113	20.1
119	20.1
128	20.2
136	20.3
145	20.4
153	20.5
159	20.6
168	20.8
178	21.0
189	21.5
202	21.8
215	22.0
225	22.1
234	22.2
246	22.3
257	22.3



### 5. Оценка загрязнения угарным газом (CO) в течение утреннего часа пик в Ханое

Густо населённая часть Ханоя может быть аппроксимирована прямоугольником со сторонами  $L$  и  $W$ , как показано на рисунке (сторона  $L$  идёт вдоль Красной Реки).

По оценке, в течение утреннего часа пик, начинающегося с 7:00 утра, на дорогах находится  $8 \cdot 10^5$  мотоциклов, каждый из которых пробегает в среднем 5 км и выпускает 12 г CO на километр. Будем считать, что это количество CO-загрязнений выпускается равномерно по времени в течение часа пик, общую массу загрязнений, выбрасываемую в единицу времени, обозначим  $M$ .



В то же время чистый северо-восточный ветер, дующий перпендикулярно Красной реке (стороне  $L$  прямоугольника) со скоростью  $u$ , проходит через город с такой же скоростью и уносит часть загрязненного CO воздуха из городской атмосферы.

Мы будем использовать следующее грубое приближение:

- CO быстро распространяется по всему объёму зоны смешения над густозаселённой частью Ханоя, так что концентрация  $C(t)$  угарного газа в момент времени  $t$  можно считать одинаковой по всему прямоугольному параллелепипеду со сторонами  $L$ ,  $W$ , и  $H$ .
- Приносимый ветром воздух является чистым. Предполагается, что загрязнённый воздух не может покидать параллелепипед через стороны, параллельные ветру.
- До 7:00 утра, концентрация CO в атмосфере пренебрежимо мала.

5.1. Получите дифференциальное уравнение для зависимости концентрации  $C(t)$  загрязнителей CO от времени.

5.2. Решите это уравнение и запишите выражение для  $C(t)$ .

5.3. Рассчитайте численное значение  $C(t)$  в 8:00 утра.

Дано  $L = 15$  км,  $W = 8$  км,  $u = 1$  м/с.